

Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024
Clasa a XI-a

Subiectul 1.	
<p>a) Demonstrăm prin inducție propoziția: $P(n): A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>$P(1)$ este evident adevărată.</p> <p>Demonstrăm că $P(n) \rightarrow P(n+1)$.</p> <p>Avem:</p> $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha \\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix}.$ <p>Conform principiului inducției matematice, rezultă că propoziția $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.</p>	3p
<p>b) Cum $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ și $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ avem $B = 4 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & \sin \frac{\pi}{12} \\ -\sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$.</p> <p>Folosind subpunctul a) rezultă</p> $B^{2024} = 4^{2024} \begin{pmatrix} \cos \frac{506\pi}{3} & \sin \frac{506\pi}{3} \\ -\sin \frac{506\pi}{3} & \cos \frac{506\pi}{3} \end{pmatrix} = 2^{4048} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ -\sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = 2^{4048} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$	2p 2p
TOTAL	7p
Subiectul 2.	
<p>a) Deoarece $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$, prin adunarea acestor inegalități se obține că:</p> <p>$a_n < \frac{n}{n^2+1}$. Cum $\frac{n}{n^2+1} < 1, \forall n \geq 1$, rezultă că $a_n < 1, \forall n \geq 1$.</p>	1p
<p>b) Avem inegalitățile:</p> $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1};$ $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1};$	

- dacă $\beta = \frac{\alpha^2}{4}$ obținem $\alpha^4 + 4\alpha^2 + 16 = 0$, contradicție cu $\alpha \in \mathbb{R}$.	1p
-dacă $\alpha^2 + 1 - 2\beta = 0$ rezultă $\beta = \frac{\alpha^2 + 1}{2}$ iar din relația $(**)$ găsim $(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 3) = 0$ și cum $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha = 1$ sau $\alpha = -1$. Dacă $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow A^2 - A + I_2 = O_2$. Dacă $\alpha = -1 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow A^2 + A + I_2 = O_2$.	1p
b) Luăm, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = -1$. $A^2 = -\varepsilon I_2$, $A^4 = \varepsilon^2 I_2$. Rezultă: $A^4 + A^2 + I_2 = (\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)I_2 = O_2$, $A^2 - A + I_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon + 1 & 1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon + 1 \end{pmatrix} \neq O_2$, $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon + 1 & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon + 1 \end{pmatrix} \neq O_2$.	1p
TOTAL	7p
Subiectul 4.	
1. Consider subșirurile $(x_{n^2})_{n \geq 1}$ și $(x_{n^2-1})_{n \geq 1}$. Avem $x_{n^2} = \{\sqrt{n^2}\} + \{\sqrt{n^2+1}\} + \{\sqrt{n^2+2}\}$. $\{\sqrt{n^2}\} = \{n\} = 0$; $\{\sqrt{n^2+1}\} = \sqrt{n^2+1} - [\sqrt{n^2+1}] = \sqrt{n^2+1} - n$, deoarece $n \leq \sqrt{n^2+1} < n+1, \forall n \geq 1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+1}] = n$. $\{\sqrt{n^2+2}\} = \sqrt{n^2+2} - [\sqrt{n^2+2}] = \sqrt{n^2+2} - n$, deoarece $n \leq \sqrt{n^2+2} < n+1, \forall n \geq 1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+2}] = n$. În concluzie: $x_{n^2} = \{\sqrt{n^2}\} + \{\sqrt{n^2+1}\} + \{\sqrt{n^2+2}\} = 0 + (\sqrt{n^2+1} - n) + (\sqrt{n^2+2} - n) =$ $= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \right) = 0$.	1p
Avem $x_{n^2-1} = \{\sqrt{n^2-1}\} + \{\sqrt{n^2}\} + \{\sqrt{n^2+1}\}$. $\{\sqrt{n^2-1}\} = \sqrt{n^2-1} - [\sqrt{n^2-1}] = \sqrt{n^2-1} - (n-1)$, deoarece $n-1 \leq \sqrt{n^2-1} < n, \forall n \geq 1 \Rightarrow [\sqrt{n^2-1}] = n-1$. $\{\sqrt{n^2}\} = \{n\} = 0$; $\{\sqrt{n^2+1}\} = \sqrt{n^2+1} - [\sqrt{n^2+1}] = \sqrt{n^2+1} - n$.	2p
În concluzie:	1p

$x_{n^2-1} = \{\sqrt{n^2-1}\} + \{\sqrt{n^2}\} + \{\sqrt{n^2+1}\} = (\sqrt{n^2-1} - (n-1)) + (\sqrt{n^2+1} - n) =$ $= (\sqrt{n^2-1} - n) + (\sqrt{n^2+1} - n) + 1 = -\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + 1.$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} + 1 \right) = 1.$ <p>Finalizare: șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ admite două subșiruri $(x_{n^2})_{n \geq 1}$ și $(x_{n^2-1})_{n \geq 1}$ astfel încât</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n^2}) = 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n^2-1}) = 1.$	1p
TOTAL	7p